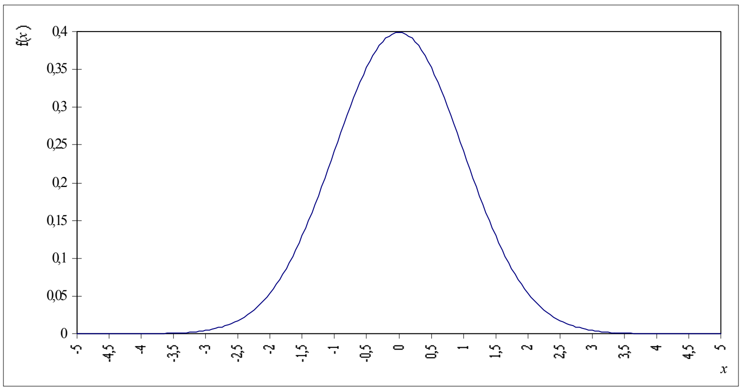
Dažniausiai aptariami tolydieji pasiskirstymai

Pagal tai, kaip konkrečiai keičiasi tikimybės tankis per visą teoriškai galimų atsitiktinio dydžio reikšmių „lauką", yra išskiriama daug įvairių tolydžiųjų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo modelių; populiaresnio pobūdžio knygose, skirtose tikimybių teorijos bei matematinės statistikos pagrindams, paprastai būna aptariama keli ar keliolika iš jų. Mes aptarsime tiktuos kelis, kuriais yra labiausiai remiamasi lyginant ir vertinant statistinius duomenis. Apie patį paprasčiausią iš tolydžiųjų – *tolygųjį* paiskirstymą kalbėta ankstesnėje paskaitoje.

1. Normalusis pasiskirstymas

Išskirtinę bei savaip ypatingą vietą užima tolydaus atsitiktinio dydžio pasiskirstymas, vadinamas ***normaliuoju*** (kartais jis siejamas su vokiečių matematiko Karlo Friedricho **Gauso** [Gauss; 1777–1855] vardu ir vadinamas *Gauso* pasiskirstymu). Normalusis pasiskirstymas svarbus ir teoriniuose tikimybių moksluose (kur juo grindžiama daugelis teorizavimų bei formulių, nes į jį *artėja* dauguma kitų pasiskirstymų), ir realiajame pasaulyje, gamtoje: mat, kaip tik šiam pasiskirstymui būdingą tikimybės tankio formą beveik visiškai tiksliai atkartoja ***savaiminis*** bet kokios *birios medžiagos* (pvz., smėlio, miltų, grūdų ir pan.) išsisklaidymas (pasiskirstymas), kai ji yra beriama iš vieno taško ant lygaus horizontalaus paviršiaus (gal iš čia – ir pavadinimas *normalusis* pasiskirstymas?). Tik savaime suprantama, jog smėlio ar kitos birios medžiagos krūvelė išsisklaido (pasiskirsto) *trimatėje* erdvėje, o tikimybės tankio kreivę mes įpratę brėžti *dvimatėje* (t. y. plokštumoje), tad norėdami grynai „natūros priemonėmis" modeliuoti įprastą normaliojo pasiskirstymo tikimybės tankio kreivę, turėtume imti tokios savaime susiformavusios krūvos *pjūvį* (sakysim, pilti smėlį prie pat stiklo sienos...). Bet šis skirtumas nėra esminis: mūsų trimačiame natūros pasaulyje tas pasiskirstymas įgauna *stereometrišką* (trimatišką) pobūdį, o teorijoje jis dažniausiai yra vaizduojamas *planimetriškai*, t. y. projektuojamas į plokštumą. Tad, pavyzdžiui, smėlio laikrodis būtų beveik tobulas miniatiūrinis (ir – „natūrinis") normaliojo pasiskirstymo „generatorius".

Tolydžiojo atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, teoriškai įmanomų reikšmių „laukas" tęsiasi nuo *minus begalyės* ($-\infty$) iki *plius begalybės* ($+\infty$), o tikimybės tankis yra pasiskirstęs beveik taip pat, kaip smėlio masė kad pasiskirsto natūrialiai supiltoje smėlio krūvoje. Tikimybės tankio grafikas parodytas čia esančiame pav.: jame paimta tik dalis galimų x reikšmių – nuo -5 iki +5, nes tikimybės tankis ties labiau į kairę ar labiau į dešinę nueinančiomis teoriškai galimomis x reikšmėmis darosi labai menkas ir beveik nebesiskiria nuo 0. Labiausiai tikimybė susitelkusi ties galimomis x reikšmėmis, artimomis nuliui, o ties pačiu nuliu jos tankis pasiekia maksimumą, po kurio pradeda vėl mažėti.



1 pav. Normaliojo pasiskirstymo tikimybės tankis

Konkretų normaliojo pasiskirstymo pavidalą apsprendžia du dalykai: tankio *maksimumo vieta* x-sų ašies atžvilgiu ir varpo pavidalo kreivės *glaustumas* bei, tuo pačiu, jos maksimumo padėtis y-ų ašies atžvilgiu, kitaip tariant, – maksimumo „aukštis". Todėl normaliojo pasiskirstymo atveju tikimybės tankio kreivės formai bei padėčiai apibūdinti yra reikalingi *du parametrai*, kuriuos šiaipjau įprasta žymėti raidėmis μ (dažnai dar žymima a arba m) ir σ (arba σ^2). Parametras μ (arba a, m – nelygu kaip pažymėta) ir apsprendžio maksimalaus tikimybės tankio vietą x-sų ašyje; kitais žodžiais tariant, nuo jo priklauso, ties kuria x reikšme bus susitelkęs didžiausias tikimybės tankis. O parametras σ nulemia kreivės aukštį ir jos suglaustumo laipsnį: abu tie kreivės „matmenys" (aukštis ir glaustumas) tarpusavy glaudžiai susiję, nes bet kuriuo atveju *plotas*, susidarantis tarp x-sų ašies ir tankio grafiko kreivės, turi išlikti pastovaus dydžio, visada vienodas ir masteliu lygus „tikimybės vienetui". Tad „kaitaliojant" σ galima tankio grafiko viršūnę „patempti" aukštyn arba „nuspausti" žemyn, bet tuo pačiu atitinkamai persiorientuos ir šoninių linijų išlinkimas, kad minėtasis plotas nepasikeistų.

Nėra sunku įrodyti, kad tolydžiojo atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, vidurkis yra lygus parametrui μ, o standartinis (kitaip – vidutinis kvadratinis) nuokrypis – parametrui σ (tai galima užrašyti taip: $x_{\text{vid.}} = \mu$; $s = \sigma$;

vadinasi, $s^2 = D_x = \sigma^2$). Todėl apie tolydųjį atsitiktinį dydį, kurio tikimybės tankį išreiškia toliau pateikiama formulė, paprastai sakoma, kad jis yra pasiskirstęs *normaliai* (arba – *pagal normalųjį dėsnį*) *su vidurkiu* $\boldsymbol{\mu}$ *ir standartiniu nuokrypiu* $\boldsymbol{\sigma}$.

Normaliojo pasiskirstymo atveju tikimybės tankis analitiškai išreiškiamas tokia formule:

$$f(x) = 1 / \sigma * \mathrm{sqrt}(2\pi) * e^{-((x-\mu)^2 / 2*\sigma^2)}$$

„Kanoninė“, prieškompiuteriniais laikais spausdintose statistikos knygose sutinkama tos formulės išvaizda yra kitokia:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{arba} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Bet matematinė esmė – ta pati.

Su *Excel* tankio funkcijos $f(x)$ reikšmė bet kuriam x apskaičiuojama pasitelkiant programinę funkciją

NORMDIST(x; μ; σ; *false*)

Suprantama, kad pasiskirstymo funkcija normaliojo pasiskirstymo atveju būtų lygi tankio funkcijos apibrėžtiniam integralui x reikšmių ruože nuo $-\infty$ iki x:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

Su *Excel* pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ reikšmė bet kuriam x apskaičiuojama pasitelkiant programinę funkciją

NORMDIST(x; μ; σ; *true*)

2. Standartinis normalusis pasiskirstymas

Nuo normaliojo pasiskirstymo „bendrojo atvejo“ jis tesiskiria tuo, kad jo $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, o $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1}$. Dėl to ir sakoma, kad standartinį normalųjį pasiskirstymą turinčio tolydaus atsitiktinio dydžio vidurkis yra 0, o standartinis (vidutinis kvadratinis) nuokrypis 1.
Kartu supaprastėja standartinio normaliojo pasiskirstymo tankio funkcijos analitinė išraiška:

$$f(x) = 1 / \mathrm{sqrt}(2\pi) * e^{-(x^2 / 2)}$$

Su *Excel* tankio funkcijos $f(x)$ reikšmė standartinio normaliojo pasiskirstymo atveju bet kuriam x apskaičiuojama pasitelkiant „bendros paskirties“ programinę funkciją

NORMDIST(x; 0; 1; *false*)

Tačiau kur kas dažniau reikalingai pasiskirstymo funkcijai $F(x)$ *Excel*'yje standartinio normaliojo pasiskirstymo atvejui yra numatyta ir atskira, speciali programinė funkcija

NORMSDIST(x)

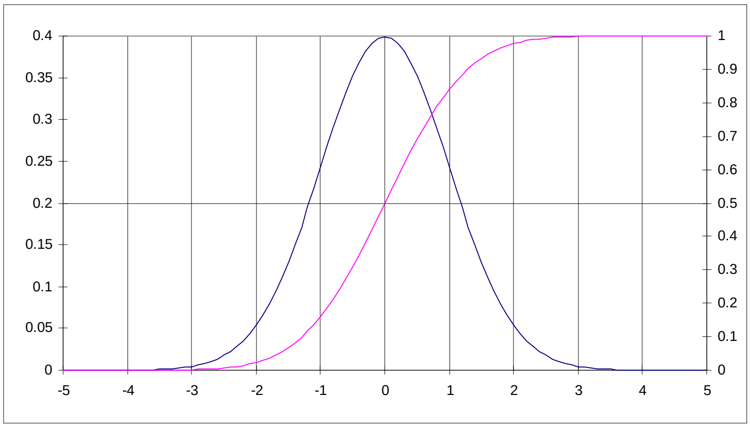
kuriai pakanka nurodyti vien tik norimą x reikšmę. Ji ir apskaičiuoja tankio funkcijos $f(x)$ apibrėžtinį integralą x reikšmių ruože nuo $-\infty$ iki x. Suprantama, jog galima naudotis ir „universalia“ funkcija NORMDIST(x; 0; 1; *true*).

Standartinis normalusis pasiskirstymas statistikoje yra nepaprastai svarbus, nes juo labai daug kur remiamasi, ypač – konstruojant statistinius kriterijus įvairiems pasiskirstymų parametrams lyginti.

Įsidėmėtina:

Jau buvo akcentuota, jog tarp tų *pirminių* dydžių, su kuriais savo praktiniame darbe susiduria kalbininkai, tolydieji apskritai yra retoki, bet dar retesni būtų pagal *normalųjį* dėsnį pasiskirstę mūsų srities pirminiai atsitiktiniai tolydieji dydžiai. Net šiaipjau savo prigimtimi aiškiai *tolydūs* fiziniai kalbos signalo parametrai (garso stiprumas, trukmė, jo pagrindinio tono ir formančių dažniai ir pan.) klasikinio normaliojo pasiskirstymo modelio neatitinka jau vien dėl to, kad negali įgauti neigiamų (mažesnių už nulį) reikšmių, vadinasi, jų net ir teoriškai galimų reikšmių laukas nėra *visa* realiųjų skaičių aibė. Tarp „taikytojų“ šiaipjau gana dažnai pasitaikantis „įtikėjimas“, jog kone visi atsitiktiniai dydžiai kaip ir „privalomai“ turį būti pasiskirstę (ar bent jau galimi laikyti esą pasiskirstę) normaliai, – nėra priimtinas. Tačiau antriniai, *išvestiniai* dydžiai (vediniai) normaliai pasiskirstę būna labai dažnai. Todėl reikia įsidėmėti, kad mūsų sferoje (beje, ir daugelyje kitų sferų!) normalusis pasiskirstymas labiausiai būdingas *išvestiniams* atsitiktiniams dydžiams, įvairiems iš pirminių duomenų gautiems vediniams (transformacijoms). Tad pratinkimės prie transformacijų!

Standartinio normaliojo pasiskirstymo grafikas:



Iš grafiko vaizdo aiškėja ir pagrindinės normaliojo pasiskirstymo ypatybės, būdingos tiek *standartiniam* normaliajam, tiek ir *bet kokiam*, bet kokias μ ir σ reikšmes turinčiam normaliajam pasiskirstymui. Jos būtų tokios:

A. Teoriškai galimų argumento x reikšmių laukas yra visa realiųjų skaičių aibė nuo „minus begalybės“ iki „plius begalybės“.

B. Tikimybės tankis didžiausią (maksimalią) reikšmę pasiekia ties $\boldsymbol{x = 0}$ (bendru atveju būtų ties $x = \mu$): čia $f(x)$ reikšmė yra lygi ***1/sqrt*(2π)** [bendru atveju ji lygi ***1/* (s • *sqrt*(2π)**].

C. Tankio kreivė yra simetriška tiesės, išvestos per $x = 0$ (bendru atveju – per $x = \mu$), atžvilgiu. Kitaip tariant, funkcijos $f(x)$ reikšmė bet kuriame taške $(\mu - d)$ yra lygi jos reikšmei taške $(\mu + d)$; čia d – bet koks už 0 didesnis skaičius.

D. Plotas, esantis tarp pasiskirstymo kreivės ir x-sų ašies, masteliu yra lygus „tikimybės vienetui“, t. y. 1. Tas „tikimybės vienetą“ atitinkantis plotas teoriškai galimų x reikšmių lauke pasiskirsto labai netolygiai: daugiausia jo sukoncentruota apie vidurkį 0 (bendru atveju - apie μ), to tolstant nuo vidurkio į bet kurią pusę, jo koncentracija smarkiai mažėja. Todėl tikimybė, jog skirtumas $x - \mu$ moduliu (abs. didumu) bus ne mažesnis už $n\sigma$, yra:

$n =$	$P_{(\lvert x-\sigma\rvert >= n\sigma)} =$
0,5	0,6171
1	0,3173
2	0,0455
3	0,0027
4	0,000064

Tai – vadinamosios „sigmų taisyklės“. Iš jų dažniausiai minima ***trijų sigmų taisyklė***: jeigu atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, tai stebimosios jo reikšmės, nuo vidurkio nutolusios daugiau kaip per 3 vidutinius kvadratinius nuokrypius, bus praktiškai labai retos, pasitaikys tik maždaug 3 kartus iš tūkstančio. O jeigu jos pasitaiko žymiai dažniau, tai tokio dydžio jau nėra pagrindo laikyti esant pasiskirsčiusiu pagal *normalųjį* dėsnį. Kitaip tariant, absoliuti didžiuma (99,73%) „tikimybės masės“ susikoncentruoja x reikšmių ruože nuo –3 iki 3 (bendru atveju nuo -3σ iki 3σ).

E. Dar įsidėmėtina – tai labai pravers ateityje – jog ***standartinio*** normaliojo pasiskirstymo atveju:

- *90% ploto, esančio tarp x-sų ašies ir tikimybės tankio kreivės, tenka x reikšmėms nuo* ***-1,64*** *iki* ***1,64***
- *95% ploto, esančio tarp x-sų ašies ir tikimybės tankio kreivės, tenka x reikšmėms nuo* ***-1,96*** *iki* ***1,96***
- *99% ploto, esančio tarp x-sų ašies ir tikimybės tankio kreivės, tenka x reikšmėms nuo* ***-2,58*** *iki* ***2,58***
- *99,9% ploto, esančio tarp x-sų ašies ir tikimybės tankio kreivės, tenka x reikšmėms nuo* ***-3,29*** *iki* ***3,29***
- *99,99% ploto, esančio tarp x-sų ašies ir tikimybės tankio kreivės, tenka x reikšmėms nuo* ***-3,89*** *iki* ***3,89***

3. Normaliojo pasiskirstymo transformavimas į standartinį normalųjį ir atvirkščiai

Viena iš paprasčiausių transformacijų yra atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį pasiskirstymą su bet kokiomis parametrų μ ir $\boldsymbol{\sigma}$ reikšmėmis, keitimas į standartinį normalųjį pasiskirstymą, ir atvirkščiai. Atsimintina, kad:

1. Jei atsitiktinis dydis x yra pasiskirstęs normaliai su parametrais μ ir σ, tai jo vedinys

$$u = (x - \mu) / \sigma$$

bus pasiskirstęs normaliai su parametrais $\mu = 0$ ir $\sigma = 1$, t. y. atitiks *standartinį* normalųjį pasiskirstymą. Vedinio *u* reikšmių apskaičiavimas pagal turimas *x* reikšmes paprastai vadinamas atsitiktinio dydžio *normalizacija* (nors ar ne logiškiau tą procedūrą būtų vadinti standartizacija?). Tai – statistiniuose skaičiavimuose dažnokai pasitaikanti procedūra.

2. Jeigu atsitiktinis dydis *u* yra pasiskirstęs pagal *standartinį* normalųjį pasiskirstymą, t. y. būna pasiskirstęs normaliai su vidurkiu 0 ir vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu (bei – tuo pačiu – dispersija) 1, tai jo vedinys

$$x = u\sigma + \mu$$

bus pasiskirstęs normaliai su parametrais μ ir σ. Ši procedūra atskiro pavadinimo kaip ir neturi, be to, ji taikoma žymiai rečiau ir praktiškai būna reikalinga tik tada, kai norime dirbtinai generuoti atsitiktinių dydžių, normaliai pasiskirsčiusių su reikiamomis parametrų μ ir σ reikšmėmis, serijas.

Pastaba: *standartinį* normalųjį pasiskirstymą atitinkantį atsitiktinį dydį, *ypač – išvestinį*, specialiojoje literatūroje linkstama žymėti raide *u* arba *z*.

4. Chi-kvadrat (χ^2) pasiskirstymas

Šis pasiskirstymas yra glaudžiai susijęs su standartiniu normaliuoju pasiskirstymu.

χ^2 pasiskirstymą turi toks tolydusis atsitiktinis dydis, kuris yra *n* atsitiktinių dydžių, turinčių *standartinį normalųjį* pasiskirstymą, kvadratų suma. Šį pasiskirstymą apibūdinantis parametras yra dėmenų (sumuojamų kvadratų) kiekis *n*, tad jis čia vadinamas laisvės laipsnių skaičiumi ar tiesiog *laisvės laipsniais*.

Natūralu, kad χ^2 pasiskirstymą turintis tolydusis atsitiktinis dydis *x* teoriškai gali įgauti bet kokias reikšmes nuo 0 iki +∞.

χ^2 pasiskirstymą turinčio tolydžiojo atsitiktinio dydžio vidurkis yra lygus laisvės laipsnių skaičiui *n*, o dispersija – 2*n*.

χ^2 pasiskirstymo tikimybės tankio „tradicinė“ analitinė išraiška (formulė) yra tokia:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

tačiau jums ją atsiminti nėra būtina; pasiskirstymo funkcija *F*(*x*) čia irgi yra tankio funkcijos integralas rėžyje nuo 0 iki *x*.

Reikia mokėti deramai pasinaudoti *Excel* programine funkcija, skirta darbui su χ^2 pasiskirstymu. Ji atrodo taip:

CHIDIST(*v*; *n*)

čia *n*, kaip įprasta, yra „rūpimąjį“ χ^2 pasiskirstymą atitinkantis laisvės laipsnių skaičius, o *v* – pasirinkta tam tikra riba iš intervalo [0; +∞]. Ši funkcija apskaičiuoja tikimybę, kad χ^2 pasiskirstymą turintis atsitiktinis dydis *x* su *n* laisvės laipsnių viršys *v*; kitaip tariant:

$$P_{\{x>v\}} = \text{CHIDIST}(v;\ n)$$

Tikimybė $P_{\{x>v\}}$, kaip pamatysime vėliau, yra labai reikalinga ir naudinga, tačiau norint apskaičiuoti tiesiog pačios pasiskirstymo funkcijos *F*(*x*) reikšmę bet kuriam *x* (aišku, iš intervalo [0; +∞]), kai jis turi χ^2 pasiskirstymą su *n* laisvės laipsnių, reikia daryti taip:

$$F(x) = 1\text{–CHIDIST}(x;\ n)$$

χ^2 pasiskirstymas dažniausiai panaudojamas, kai reikia palyginti empirinius pasiskirstymus su teoriniais.

5. Fišerio pasiskirstymas

Irgi susijęs su standartiniu normaliuoju pasiskirstymu, tiksliau – su tokia situacija: turime dvi standartiškai normaliai pasiskirsčiusių tolydžiųjų atsitiktinių dydžių serijas: vienoje jų yra *m*, o kitoje *n* tokių dydžių. Serijas sudarantys dydžiai keliami kvadratu, kvadratai susumuojami, ir gautosios sumos padalinamos iš dėmenų kiekio, t.y. viena – iš *m*, kita iš *n*. Gautų rezultatų *santykis* ir bus atsitiktinis dydis, turintis vadinamąjį Fišerio pasiskirstymą su *m* ir *n* laisvės laipsnių (pažymėkime jį, tarkim, *L*(*m*, *n*); dažniausiai jam žymėti parenkama raidė *F* ir įprastas jo žymėjimas būtų *F*(*m*, *n*), bet jis kiek maišytųsi su nusistovėjusiu pasiskirstymo funkcijos žymėjimu...). Užrašant simboliais, būtų:

$$L(m,n) = ((X^2_1+X^2_2+...X^2_m) / m) / ((Y^2_1+Y^2_2+...Y^2_n) / n)$$

čia X_1, X_2, ... X_m ir Y_1, Y_2, ... Y_m standartiškai normaliai (su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija) pasiskirstę tolydūs atsitiktiniai dydžiai.

Fišerio pasiskirstymas labiausiai yra panaudojamas konstruojant kriterijus kitų pasiskirstymų *dispersijoms* palyginti.

Laisvės laipsnių skaičiai *m* ir *n* yra Fišerio pasiskirstymo parametrai; jo *tikimybės tankio* analitinė išraiška yra palyginti sudėtinga:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}$$

tad tos formulės atsiminti bent jau tiems, kas statistinius darbus dirba su kompiuteriais ir programinėmis skaičiuoklėmis, taip pat nebūtina.

Kadangi atsitiktinis dydis $L(m,n)$ yra į kažkiek dalių padalintų *kvadratų* sumų, t.y. *teigiamų* skaičių santykis, tai ir jo galimų įgyti reikšmių aibė yra tik *teigiamieji* skaičiai (pradedant nuo 0).

Fišerio pasiskirstymą su m ir n laisvės laipsnių turinčio tolydžiojo atsitiktinio dydžio (L) vidurkis yra lygus $n/(n-2)$, o dispersija lygi $2n^2(n+m-2) / (m(n-2)^2(n-4))$.

Excel'io programinė funkcija darbui su Fišerio pasiskirstymu yra labai panaši į analogišką chi-kvadrat pasiskirstymo funkciją:

FDIST(v; m; n)

čia m ir n yra Fišerio pasiskirstymo parametrai – laisvės laipsnių skaičiai, o v – iš intervalo [0; +∞] pasirinkta tam tikra riba. Ši funkcija apskaičiuoja tikimybę, kad Fišerio pasiskirstymą turintis atsitiktinis dydis x *(*šįkart jį žymėsime nebe *L)* su m ir n laisvės laipsnių viršys v; kitaip tariant:

$P_{\{x>v\}}$ = FDIST(v; m; n)

Apskaičiuoti gi pačios pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ reikšmę bet kuriam x (aišku, iš intervalo [0; +∞]), kai jis turi Fišerio pasiskirstymą su m ir n laisvės laipsnių, reiktų panašiai, kaip ir chi-kvadrat pasiskirstymo atveju:

$F(x)$ = 1–FDIST(x; m; n)

6. Stjudento pasiskirstymas

Šis pasiskirstymas, panašiai kaip ir Fišerio, modeliuoja pasiskirstymą tolydaus atsitiktinio dydžio, kuris pats yra *santykis*, susijęs irgi su standartiškai normaliai pasiskirsčiusiais atsitiktiniais dydžiais. Jo situacija tokia: tarkime, jog turime standartiškai normaliai pasiskirsčiusį AD z ir seriją lygiai taip pat (t.y. standartiškai normaliai, su vidurkiu 0 ir dispersija 1) pasiskirsčiusių AD u_1, u_2, ... u_n. Tuomet Stjudento pasiskirstymą su n laisvės laispnių turės tolydusis atsitiktinis dydis:

$t_n = z$ / sqrt $((u_1+u_2+ ... +u_n) /n)$

Kadangi z gali įgauti ir teigiamas, ir neigiamas reikšmes, tai ir t_n galimų reikšmių aibė yra iš esmės tokia pati, kaip ir standartinio normaliojo pasiskirstymo atveju: nuo – ∞ iki +∞ arba, vartojat įprastesnę užrašymo formą, [– ∞; +∞].

Stjudento pasiskirstymą su n laisvės laipsnių turinčio atsitiktinio dydžio t_n vidurkis yra lygus nuliui, o dispersija $n/(n-2)$. Tiesa, ši priklausomybė galioja tik tada, kai n>4.

Stjudento pasiskirstymo *tikimybės tankio* analitinė išraiška (formulė) atrodo taip:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

O tankio grafiko bendras vaizdas yra panašus į standartinio normaliojo pasiskirstymo tankio grafiką. Beliktų pridurti, kad tada, kai laisvės laipsnių skaičius darosi be galo didelis (t.y artėja į begalybę), Stjudento pasiskirstymas iš tikro išvirsta į standarytinį normalųjį pasiskirstymą (praktiškai galima laikyti, jog Stjudento pasiskirstymas jau virsta standartiniu normaliuoju, kai laisvės laipsnių skaičius n viršija 100).

Deja, programinė *Excel* funkcija **TDIST(*x*; *m*; *uodegos*)**, skirta darbui su Stjudento pasiskirstymą turinčiais dydžiais, yra ganėtinai suvelta ir nepakankamai aiškiai aprašyta *Help*'uose: viena, ji priima tik teigiamas (pradedant nuo 0) x-sų reikšmes, o antra – jos grąžinamas rezultatas priklauso nuo vadinamojo „uodegų“ skaičiaus. Norint apskaičiuoti pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ reikšmes Stjudento pasiskirstymą su n laisvės laipsnių turinčiam dydžiui x, galinčiam įgauti bet kokias reikšmes iš viso realiųjų skaičių intervalo [– ∞; +∞], reikia, glaustai tariant, daryti taip:

a) neigiamoms x reikšmėms:

$F(x)$ = TDIST(ABS(x); n; 1)

b) teigiamoms x reikšmėms:

$F(x)$ = 1–TDIST(x; n; 1)

Todėl „universali“ *Excel*'io išraiška, galinti apskaičiuoti $F(x)$ **bet kokioms** x reikšmėms, būtų tokia:

IF(x<0; TDIST(ABS(x); n; 1); 1–TDIST(x; n; 1))

Toliau $F(x)$ reikšmės panaudojamos taip pat, kaip ir kitų tolydžiųjų pasiskirstymų atveju.

Stjudento pasisirstymas yra plačiai taikomas lyginant bei analizuojant empirinius pasiskirstymus, suformuotus iš palyginti nedidelių (mažiau nei 100 bandymų) imčių.

7. Kiti tolydieji pasiskirstymai

Šįkart bus apsiribota vien jų pavadinimų paminėjimu. Tai:

- Beta pasiskirstymas
- Gama pasiskirstymas
- Koši pasiskirstymas
- Relėjaus pasiskirstymas
- Maksvelo pasiskirstymas
- Lognormalusis pasiskirstymas

Plačiau apie juos jau tektų pasiskaityti spec. literatūroje.