Tolydieji teoriniai pasiskirstymai:

1. Tolydžiųjų atsitiktinių dydžių specifika

A. Tolydžios prigimties pirminių (empirinių) atsitiktinių dydžių, su kuriais tiesiogiai susidurtų kalbininkas tyrinėtojas, nėra daug, ir absoliuti didžiuma jų (pvz., garso trukmė, pagr. tono ir formančių dažniai, spektriniai tankiai ir t.t.) yra vienaip ar kitaip susiję su eksperimentiniais kalbos signalo tyrimais, o tekstometriniuose ir anketiniuose tyrimuose beveik ištisai susiduriama tik su diskrečiaisiais pirminiais atsitiktiniais dydžiais. Tačiau visiems, kas tik imasi statistinio duomenų aprašymo, o tuo labiau – sudėtingesnių statistinių procedūrų, tenka susidurti su „antriniais“, t.y. išvestiniais, apskaičiavimų būdu gaunamais tolydžiaisiais atsitiktiniais dydžiais. Tad verstis be šios atsitiktinių dydžių atmainos – neįmanoma.

B. Svarbiausios tolydžiųjų atsitiktinių dydžių ypatybės yra šios:

- reikšmių, kurias gali įgyti tolydieji atsitiktiniai dydžiai, yra *begalinė* (matematine prasme) *daugybė*, kitaip sakant, ir pati jų aibė yra *nebaigtinė*, iš principo *nesuskaičiuojama*
- dėl to jų įgyjamų reikšmių negalima *tiksliai* išreikšti baigtiniais skaičiais
- tikimybė, kad toks atsitiktinis dydis įgis kokią konkrečią *tikslią* reikšmę, darosi *nulinė*, nes „tikimybės vienetą“ prisieina išdalinti (negu ir ne po lygiai!) *begalinei* daugybei tokių galimų reikšmių

C. Dėl šių ypatybių tolydžiųjų atsitiktinių dydžių pasiskirstymų neišeina apibūdinti taip, kaip diskrečiųjų – išvardinant visas galimas jų reikšmes bei nurodant kiekvienos iš tų reikšmių tikimybes. Todėl prisieina verstis mums jau įprasta universalesne – tiek diskretiesiems, tiek ir tolydiesiems pasiskirstymams tinkančia – charakteristika – *pasiskirstymo funkcija* [$F(x)$] bei tenka įsivesti naują, tik tolydžiųjų dydžių pasiskirstymus apibūdinančią charakteristiką – *tikimybės tankį* [$f(x)$]. Pabrėžtina, kad, jeigu diskrečiųjų atsitiktinių dydžių atveju pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ svarba yra palyginti nedidelė, kaip ir antraeilė, tai tolydžiųjų – ji nepaprastai reikšminga.

D. Tikimybės tankio bei tolydaus atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos supratimui bei normaliam paaiškinimui reikia truputėlio aukštosios matematikos žinių, tiksliau – šiek tiek žinių iš vieno aukštosios matematikos kurso – iš *matematinės analizės*, kuri yra susijusi su vadinamųjų „begalinių mažybių“ arba ribų sfera ir su diferencialiniu bei integraliniu skaičiavimu. Beje, matematinės analizės pradmenys turėtų būti praeinami ir vidurinėje mokykloje.

2. Tikimybės tankio supratimas

- Galima kalbėti ne apie tikimybę, kad tolydusis atisiktinis dydis įgaus kokią nors konkrečią reikšmę, bet – tik apie tikimybę, kad jis įgaus reikšmę iš kokio nors intervalo. Intervalams galima apskaičiuoti ir „tikras“ tikimybes $P_{\{i \div (i+\Delta)\}}$, ir kumuliatyvines tikimybes, t.y. pasiskirstymo funkcijos $F_{\{i \div (i+\Delta)\}}$ reikšmes.
- Visą nebaigtinę (begalinę) tolydaus atsitiktinio dydžio galimų reikšmių aibę suskirsčius į daug nedidelių intervalų, nesunku pastebėti, jog tikimybė tam dydžiui įgauti reikšmes iš jų – ne visur vienoda (tolygi): vienoda ji tebūna tik šiaipjau reto *tolygiojo* pasiskirstymo atveju.
- Svarbu yra rasti būdą, kaip nustatyti tos tikimybės *pasikeitimo* einant nuo intervalo prie intervalo (tiksliau tariant, kitimo einant x-sų ašimi) *mastą* (dydį arba „greitį“). Daroma taip. Imamas koks nors tolydaus atsitiktinio dydžio x galimų reikšmių intervalas ir praplečiamas mažyčiu žingsneliu Δx bei žiūrima, koks atsirado kumuliatyvinės tikimybės (pasiskirstymo funkcijos) pokytis ΔF. Ieškoma tų pokyčių ***santykio*** (ΔF / Δx) ***ribos***, kai Δx vis labiau mažinamas, t.y. kai $\Delta x \to 0$. Ta riba ir bus tikimybės kitimo mastas (greitis) bei, kartu, *tikimybės tankis*.
- Matematiniais simboliais tą ribą (tikimybės tankį) užrašytume:

$$F\,' = f(x) = \lim\,(\Delta F / \Delta x),\text{ kai } \Delta x \to 0$$

- Matematinėje analizėje *riba*, prie kurios artėja iš esmės *tas pats* santykis – funkcijos reikšmės pokyčio santykis su argumento reikšmės pokyčiu, kai argumento reikšmės pokytis be galo mažėja, t.y. artėja prie nulio – yra vadinama (funkcijos) *išvestine*. O pati funkcija, kurios reikšės pokytis lyginamas su argumento pokyčiu, vadinama *pirmykšte funkcija*. Išvestinė yra gana „iškalbi“ ir duoda daug informacijos apie savąją pirmykštę funkciją.

Yra specialios taisyklės, pagal kurias galima rasti reikiamos funkcijos (ji šiuo atveju būna laikoma pirmykšte) išvestinę; tas veiksmas vadinamas *diferenciavimu*. Ir atvirkščiai: turimą funkciją galima jau iš karto laikyti esant išvestine ir pagal atitinkamas specialias taisykles rasti jai pirmykštę funkciją. Tasai veiksmas vadinamas *integravimu*.

Ta prasme su funkcijomis yra panašiai, kaip su suaugusių žmonių (kurie tuo pat metu būna ir kažkam *tėvai* ir kažkam *vaikai*) kartomis: jos gali turėti savo išvestines, kurioms jos yra pirmykštės funkcijos, ir tuo pat metu jos gali turėti savas pirmykštes funkcijas, kurioms jos pačios yra išvestinės. Taip susidaro lyg ir ištisinis funkcijų kontinuumas, tolydiška jų „erdvė“.

• Jei tuos matematinės analizės veiksmus – diferenciavimą ir integravimą – tektų atlikti patiems, prisieitų aiškintis apie dar vieną specifišką „dydį“ – *diferencialą*, ir išmokti minėtąsias diferenciavimo bei integravimo taisykles, bet kalbininkui to dažniausiai nė neprisieina pačiam daryti, nes praktiškai visų jam rūpimų tolydžiųjų atsitiktinių dydžių tikimybės tankio funkcijos ar/ir pasiskirstymo funkcijos matematinės statistikos ir tikimybių teorijos knygose būna pateikiamos „gatavos“: tereikia išmokti jas atsirinkti ir jomis pasinaudoti. O reikiamus apskaičiavimus racionaliausia atlikti su atitinkama kompiuterio programine įranga: šiuolaikinės bent kiek specializuotos programos (kad ir skaičiuoklė *Excel*) paprastai šitiems skaičiavimams turi gatavas programines funkcijas – tereikia tik išsiaiškinti ir atitinkamai pateikti joms argumentus.

• Tad matematikos kalba kalbant derėtų sakyti, jog tolydaus atsitiktinio dydžio *tikimybės tankis* yra jo *pasiskirstymo funkcijos išvestinė*, o *pasiskirstymo funkcija* yra *tikimybės tankio pirmykštė funkcija*. Kitaip tariant, jei žinome tolydaus atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją, tai ją išdiferencijavę gautume jo tikimybės tankį, o jei žinome tikimybės tankį, tai jį suintegravę gautume tolydaus atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją.

3. Tikimybės tankis ir „vaizdinis mąstymas“

„Tikriesiems“ filologams, kurie, kaip kartais tvirtinama, pasižymį „vaizdingu daiktiniu“ mąstymu, tikimybės tankio sampratą galbūt galima būtų grįsti įsivaizduojamu kokios nors *masės* paskirstymu. Pvz., per visą teoriškai įmanomų atsitiktinio dydžio reikšmių aibę susidarantį tikimybės dydį, lygų 1 (būtinojo įvykio tikimybė!) leistina būtų įsivaizduoti kaip kokios nors ***masės***, tarkime, sviesto gniužulo, *vienetą* (kilogramą, svarą ar pan.). Jeigu diskrečiųjų pasiskirstymų atveju tą „sviestą“ derėtų vaizduotis išdalinamą po didesnį ar mažesnį kąsnelį, po (paprastai – skirtingo dydžio) gniužulėlį, tenkantį kiekvienai iš galimų reikšmių, tai tolydžiojo pasiskirstymo atveju jau reiktų įsivaizduoti, kad tas sviestas tolydžiai ištepamas visame galimų atsitiktinio dydžio reikšmių ruože (intervale), tik jo sluoksnio storis (ir tuo pačiu– masė, tenkanti to intervalo bet kokioms vienodo ilgio atkarpėlėms) įvairuoja, yra ne pastovi, bet kintama, vienur jo tenka gausiau, kitur gi – skalsiau. Ir svarbu ne tiek *pats* sluoksnio *storis*, kiek jo *kitimo staigumas* (greitis): jis ir atitiktų *tankį* (sviesto, kokios nors košės ar tikimybės – nėra pagaliau esminio skirtumo...).

Šiame smarkiai suprimityvintame sugretinime slypi ir labai svarbus momentas – viso masės *vieneto* (kilogramo, svaro ar pan.) tolydiškas (nors dažniausiai – ne tolygus!) *išdalinimas*, „ištepimas“ po visą teoriškai įmanomų atsitiktinio dydžio reikšmių ruožą. Lygiai taip pat ir „tikrasis“ tikimybės vienetas (1) yra „išdalinamas“ – dažniausiai nevienodu, nepastoviu tankiu – *visam* galimų reikšmių „laukui“, tik vienoms to „lauko“ zonoms tos tikimybės paprastai tenka apsčiau, o kitoms – žymiai skysčiau. O kadangi tikimybės tankis dažniausiai vaizduojamas dvimačiu (plokštuminiu) grafiku, tai ir įprasta yra sakyti, kad plokštumos *plotas*, susidaręs tarp atsitiktinio dydžio reikšmių (x-sų) ašies ir tankio funkcijos grafiko linijos, *atitinka vienetą* – būtinojo įvykio tikimybę.

O jei norime sužinoti, kokio yra *tikimybė* tolydžiajam atsitiktiniam dydžiui *papulti į* bet kurią mums parūpusią teoriškai galimų jo reikšmių ***atkarpą*** (intervalą), tai turime išsiaiškinti, kokia „tikimybės vieneto“, „ištepto“ štai šituo konkrečiu būdu po visą galimų reikšmių „lauką“, *dalis* tenka būtent šiai atkarpai (visiška 'analogija' su sviestu!..).

Ji yra lygi tankio funkcijos *apibrėžtiniam integralui* toje galimų atsitiktinio dydžio reikšmių atkarpoje.

4. Dar apie pasiskirstymo funkciją $F(x)$

Jau minėta, kad pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ svarba labiausiai išryškėja būtent tolydžiuosiuose pasiskirtymuose. Be to, tolydžiųjų pasiskirstymų „teorija“ leidžia pasiskirstymo funkciją $F(x)$ griežčiau ir tiksliau apibrėžti, suteikti jai „matematinio“ aiškumo.

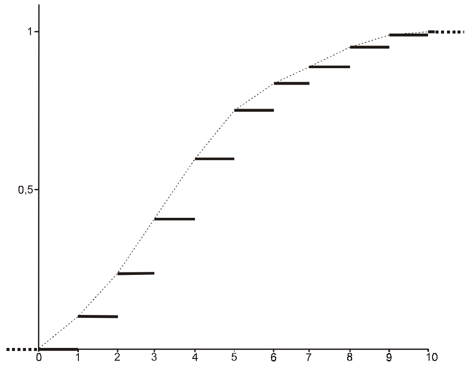
Apibrėžimai

Visų *teorinių* pasiskirstymų – tiek tolydžiųjų, tiek ir diskrečiųjų – atveju pasiskirstymo funkciją $F(x)$ pačiu bendriausiu būdu galima apibrėžti kaip sukauptąją arba kumuliatyvinę tikimybę.

Griežtesnis apibrėžimas, iškeliantis vieną iš iki šiol neakcentuotų aspektų, būtų toks: atsitiktinio dydžio x pasiskirstymo funkcija bet kuriai jo reikšmei (taškui) z iš galimų reikšmių aibės yra *tikimybė*, kad atsitiktinai paimtas x bus mažesnis už z; kompaktiškai užrašius:

$$F(z) = P(x<z)$$

Jeigu tolydžiojo atsitkitinio dydžio atveju šis momentas yra suprantamas savaime, tai turint galvoje diskrečiuosius atsitiktinius dydžius, jį reiktų aptarti atskirai. Mat iki šiol braižyti diskrečiųjų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ grafikai ją perteikdavo gerokai apibendrintai ir todėl – ne visai preciziškai: iš grafikų gali susidaryti įspūdis, kad ji ***auganti*** kaip tik „tarpuose“ tarp reikšmių. Taip iš tikrųjų nėra: tarpuose tarp reikšmių ji iš tikro turėtų išlikti ***pastovi***, tokio paties lygio, kokį pasiekė ties iš kairės esančia reikšme. O ties nauja, dešiniau esančia diskretaus atsitiktinio dydžio reikšme pasiskirstymo funkcija turėtų tarsi nutrūkti ir šuoliu pašokti iki naujojo savo lygio. Skirtumas tarp įprasto, apibendrinto ir preciziško diskretaus atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ vaizdavimo turėtų būti aiškus iš šio brėžinio (apibendrinta – punktyrinė linija, preciziška – ištisinė):



Todėl diskrečiųjų atsitiktinių dydžių atveju preciziškai kalbant derėtų sakyti, jog ties kiekviena to dydžio įgyjama reikšme x funkcijos $F(x)$ reikšmė *šuoliškai kinta*, iš $F(x–1)$ ***pavirsta*** į F(x). Vadinasi, tiksliai lygi, identiška tikimybei $P(x<z)$ ji išlieka tik tol, kol be galo *artėjama* į z, o tiksliai ties pačiu tašku z ji virsta $P(x<=z)$. Čia – principinė tolydžiųjų ir diskrečiųjų atistiktinių dydžių skirtybė.

Šioje paskaitoje pateikiamas „integralinis“ apbrėžimo būdas reikalautų pasiskirstymo funkciją $F(x)$ diskretiesiems ir tolydiesiems atsitiktiniams dydžiams apibrėžti atskirai:

• ***diskretaus*** atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija $F(x)$ bet kuriai galimai jo reikšmei x yra lygi visų jo galimų reikšmių nuo jų intervalo pradžios iki x imtinai ***tikimybių sumai***

• ***tolydaus*** atsitiktinio dyžio pasiskirstymo funkcija $F(x)$ bet kuriai jo reikšmei x yra lygi jo tikimybės tankio ***apibrėžtiniam integralui*** rėžyje nuo galimų jo reikšmių intervalo pradžios iki x

Dar paminėtina pora specifiškų pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ ypatumų:

• jos reikšmė visada teigiama ir „telpa“ į intervalą [0; 1] (kitaip užrašius: $0 <= F(x) <= 1$)

• didėjant x-ui $F(x)$ reikšmė niekuomet nemažėja: jei $x_2 > x_1$, tai $F(x_2) >= F(x_1)$

5. Pagrindinė informacija apie toldydųjį pasiskirstymą

Kiekvienam – tiek tolydžiajam, tiek ir diskrečiajam – pasiskirstymui egzistuoja tam tikras informacijos, kurią reikia žinoti iš anksto, minimumas. Tai:

• galimų atsitiktinio dydžio (x) reikšmių aibė (intervalas)
• konkrečios (pasiskirstymo) parametrų reikšmės

Nuo to, kokios pasirenkamos parametrų reikšmės, priklauso konkreti pasiskirstymo forma (turima galvoje grafinis pasiskirstymo kreivių vaizdas). Kartu nuo jų priklauso ir tą konkretų pasiskirstymą apibūdinančios (pasiskirstymo) charakteristikos, iš kurių svarbiausios yra:

• (teorinis) vidurkis
• dispersija

Kartais dar nurodomos ir kitos, papildomos pasiskirstymo charakteristikos, bet faktiškai visos jos yra ne kas kita, kaip pasirinktųjų pasiskirstymo parametrų funkcijos, apskaičiuojamos pagal tam tikras, vieno ar kito pasiskirstymo „prigimtį“ atitinkančias formules.

6. Pavyzdys: tolygusis pasiskirstymas

Bene paprasčiausias tolydžiojo pasiskirstymo atvejis būtų vadinamasis *tolygusis* pasiskirstymas.

Nepainioti sąvokų *tolydusis* ir *tolygusis* pasiskirstymas! Tolydžiaisiais vadinami visi pasiskirstymai, kurie modeliuoja tolydžios prigimties atsitiktinių dydžių sklaidą, todėl pasiskirstymo apibūdinimas *tolydusis* reiškia jo priskyrimą šiai gana stambiai pasiskirstymų grupei (šeimai). O tolygusis yra tik vienas iš tolydžiųjų pasiskirstymų, tai – konkretaus tolydžiojo pasiskirstymo atvejo įvardijimas.

Specifinė tolygiojo pasiskirstymo ypatybė būtų tokia: pagal jį pasiskirsčiusio tolydaus atsitiktinio dydžio galimų reikšmių intervalas (aibė) nėra iš anksto apibrėžtas ir todėl jį galima pasirinkti praktiškai bet kokį; kartu – pasirinktasis intervalas, tiksliau to intervalo ribos (pažymėkime a – apatinę ir v – viršutinę jo ribas) yra ir šio pasiskirstymo parametrai. ***Svarbiausia***: tikimybė atsitiktiniam dydžiui x įgyti bet kurią reikšmę nuo a iki v (kitaip sakant – papulti į bet kurį to intervalo tašką) išlieka visur *vienoda*, pastovi, nesikeičianti, tolygi (iš čia ir pavadinimas: *tolygusis* pasiskirstymas!). Vaizdžiai tariant, „tikimybės vienetas“ visų galimų atsitiktinio dydžio reikšmių ruože nuo a iki v čia „ištepamas“ *vienodo* storio sluoksniu. O konkretus to sluoksnio „storis“ bepriklauso tik nuo *intervalo ilgio*, nuo „atstumo“ tarp v ir a.

Bendru tolygiojo pasiskirstymo atveju tikimybės tankis $f(x)$ ir pasiskirstymo funkcija $F(x)$ apskaičiuojama taip:

$$f(x) = \frac{1}{v - a},$$

$$F(x) = \frac{x - a}{v - a}$$

Savaime suprantama, jog $f(x)$ tokiu atveju nuo x net nepriklauso: ji visoms x reikšmėms vienoda; grafiškai tai būtų horizontali tiesė, kertanti Y-ų ašį taške $1/(v–a)$. To tarpu $F(x)$ priklauso nuo x reikšmės ir tiesiškai kinta nuo 0 (kai $x = a$) iki 1 (kai $x = v$).

Pagrindinės tolygiai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio charakteristikos yra:

vidurkis –

$$x_{\text{vid.}} = \frac{a + v}{2}$$

dispersija –

$$D_x = \frac{(v - a)^2}{12}$$

Pavyzdžiai

• 0,01 kHz skiriamosios gebos skaitmeniniu dažnumomačiu matuojamas garso pagrindinio tono dažnis. Koks yra susidarančios paklaidos (Hz) vidurkis ir dispersija? Kokia yra tikimybė, kad ši paklaida moduliu (absoliutiniu didumu) neviršys 3,7 Hz?

Kadangi matavimo prietaiso skiriamoji geba yra 0,01kHz = 10 Hz, tai „hercų vienetai“ iki 5 yra apvalinami „į mažesnę“ pusę ir maksimali paklaida gali susidaryti -5 (Hz), o virš 5 - apvalinami „į didesnę“ pusę ir maksimali paklaida gali būti 5 (Hz), tad galimų paklaidos reikšmių intervalas yra nuo -5 iki 5 (kitaip tariant, paklaida svyruoja šiose ribose); paklaida – *tolygiai* pasiskirstęs atsitiktinis dydis, nes bet kokia „hercų vienetų“ reikšmė tikėtina vienodai. Todėl pakaidos vidurkis būtų (-5+5)/2=0 Hz (tai paaiškinama: besisumuodamos teigiamos ir neigiamos paklaidos viena kitą naikina), o dispersija $(5–(-5))^2/12 =(5+5)^2/12 =100/12 = 8,333$ Hz (taigi, paklaidos vid. kv. nuokrypis tuomet bus SQRT(8,333)=2,887 Hz).

Reikiamą tikimybę apskaičiuotume įprastu būdu panaudodami pasiskirstymo funkcijos reikšmes užduotojo intervalo galuose:

$$P_{(-3,7 <= \text{paklaida} <= 3,7)} = F(3,7) – F(-3,7) = (3,7-(-5))/(5-(-5)–(-3,7-(-5))/(5-(-5)) = 8,7/10-1,3/10 =7,4/10 =0,74$$

Pastaba: iš tolygiojo pasiskirstymo „prigimties“ išplaukia, jog tikimybė, kad šį pasiskirstymą turintis atsitiktinis dydis įgaus reikšmes iš intervalo nuo f iki g (kai f>=a, g<=v ir f<g!) yra lygi:

$$P_{(f<=x<=g)} = \frac{g - f}{v - a}$$

Tad pagal ją aną tikimybę būtų galima skaičiuoti iš karto: (3,7–(-3,7))/(5–(-5))=7,4/10=0,74

• Kos bus su Excel formule INT((213-158)*RAND()+158) generuojamų atsitiktiktinių skaičių vidurkis ir dispersija? Kokia yra tikimybė, kad šitaip sugeneruotas pavienis atsitiktinis skaičius bus ne mažesnis kaip 200?

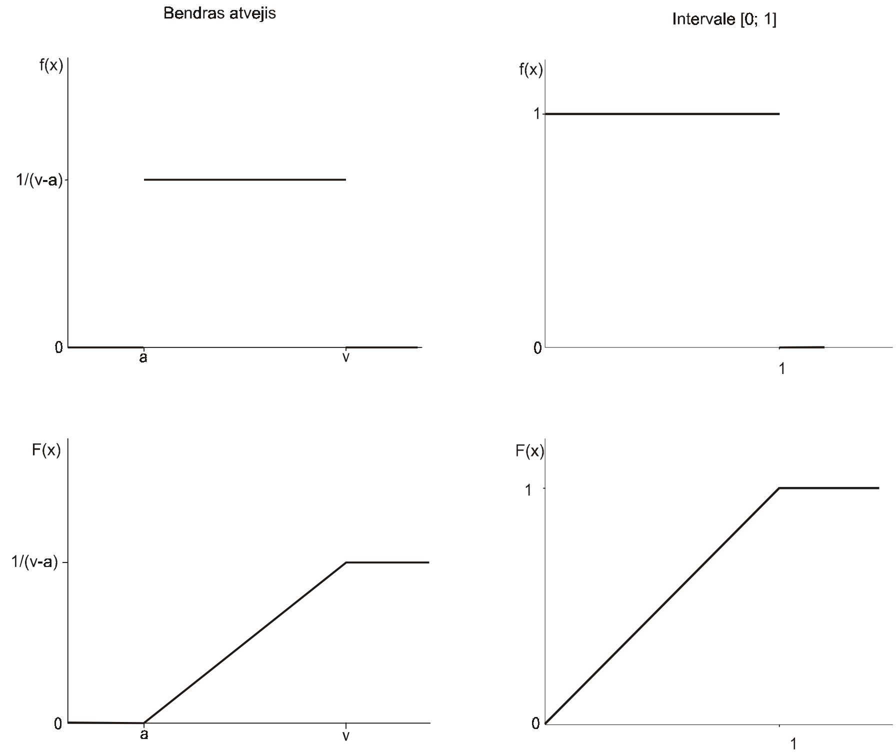
Vadinasi, a=158, v=213. Tada vidurkis lygus (158+213)/2=185,5; dispersija lygi $(213-158)^2/12=252,0833$

Į antrą klausimą galima atsakyti samprotaujant taip: kadangi g=v=213, o f=200, tai

$$P_{(200<=AS<=213)} = (213-200)/(213-158) = 13/55 = 0,2364$$

Gana plačiai žinoma speciali tolygiojo pasiskirstymo „realizacija“ yra intervale nuo 0 iki 1 tolygiai pasiskirstę atsitiktiniai skaičiai, paprastai pateikiami vadinamosiomis *atsitiktinių skaičių lentelėmis*. Į juos panašūs *kvaziatsitiktiniai* (pseudoatsitiktiniai) skaičiai generuojami su *Excel* programine funkcija RAND(). Galimų atsitiktinio skaičiaus reikšmių intervalas šiuo atveju tęsiasi nuo 0 iki 1 (a=0; v=1), todėl $f(x)$=1/1=1, $F(x)$=x/1=x. O tokių atsitiktinių skaičių „populiacijos“ vidurkis lygus 1/2=0,5 bei dispersija lygi $1^2/12=0,0833$.

Grafiškai pavaizduotas tolygusis pasiskirstymas atrodytų taip:



Dar vienas pavyzdys iš eksperimentinės fonetikos

Tiriamasis kalbos signalas kvantuojamas 25 kHz dažniu, kitaip tariant, kas 40 mikrosekundžių (µs) matuojama momentinė jo amplitudės reikšmė. Signalas pasibaigia (nutrūksta) nepriklausomai nuo to, kada paskutinį kartą buvo matuotas, tad jo pabaigos tikimybė bet kuriuo šio intervalo momentu išlieka vienoda. Reikia apskaičiuoti, kokia yra tikimybė, kad signalas nutrūks nuo paskutiniojo matavimo praėjus ne daugiau kaip 15 µs.

Kadangi a=0, v=40, f=0 ir g=15, tai

$$P_{(0<=\mathrm{tarpsnis}<=15)} = (15-0)/(40-0)=15/40=0{,}375$$

„Gyvenimiškas“ pavyzdys

Tarkime, jog kokio nors maršruto troleibusas į stotelę atvažiuoja reguliariai kas 15 min. Vadinasi, atėjus į stotelę nepriklausomai nuo troleibuso tvarkaraščio, jo gali tekti laukti nuo 0 iki 15 min., ir bet kuri šiame intervale „telpanti“ „pavienė“ laukimo trukmė (pvz., 1 min., 9 min., 4 min. ir t.t.) tikėtina vienodai. Reikia apskaičiuoti tikimybę „laukimo intervalui“; tarkime, kokia yra tikimybė, kad troleibuso teks laukti nuo 7 iki 12 min.?

Sprendimas vėl visiškai analogiškas:

a=0; v=15; f=7; g=12; todėl

$$P_{(7<=\mathrm{laukimo\ trukmė}<=12)} = (12-7)/15-0 = 5/15 = 0{,}333$$